

HOOFDSTUK 6: Kansrekening

6.1 De productregel

Opgave 1:

- 3 van de 4 knikkers zijn rood
- $P(\text{rood uit II} = \frac{2}{3})$
- $4 \cdot 3 = 12$
- $\frac{6}{12} = 0,5$
- $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = 0,5$

Opgave 2:

- $P(\text{twee wit}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{5} = \frac{10}{50} = 0,2$
- $P(1 \text{ blauw en } 1 \text{ rood}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{50} = 0,12$
- $P(1 \text{ wit en } 1 \text{ groen}) = \frac{5}{10} \cdot 1^5 = \frac{5}{50} = 0,1$
- $P(\text{geen blauw}) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{50} = 0,42$
- $P(\text{geen rood}) = \frac{8}{10} \cdot \frac{5}{5} = \frac{40}{50} = 0,8$

Opgave 3:

- $P(3 \times \text{banaan}) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{24}$
- $P(\text{geen kersen}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{24}$
- $P(2 \times \text{citroen en } 1 \times \text{banaan}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$
- $P(3 \times \text{citroen}) = 0$

Opgave 4:

- $\frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{64}{216}$
- $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$
- $\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{8}{216}$

Opgave 5:

- $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{81}{256} = 0,316$
- $\frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{16}{256} = 0,063$
- $P(4 \times \text{één}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{256} = 0,004$

Opgave 6:

- empirische kans
- $0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,8 = 0,24$
- $0,4 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,016$
- $P(\text{soep, vis, ijs}) = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,144$
 $0,144 \cdot 500 = 72$

Opgave 7:

- afhankelijk
- $0,7 \cdot 0,2 = 0,14$

- c. afhankelijk
d. afhankelijk

Opgave 8:

- a. $\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{12}$
b. $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$
c. deze kansen optellen

Opgave 9:

- a. $\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{12}$
b. $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{12}$
c. $\frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{12}$
d. $P(22 \text{ of } 31) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{12}$
e. $P(\text{minstens } 1 \times \text{drie}) = 1 - P(\text{geen drie}) = 1 - \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$

Opgave 10:

- a. $\frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{60} = 0,2$
b. $P(3 \times \text{banaan of } 3 \times \text{kers of } 3 \times \text{citroen}) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{60} = 0,117$
c. $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{27}{60} = 0,45$
d. $P(\text{minstens } 1 \text{ kers}) = 1 - P(\text{geen kers}) = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{36}{60} = 0,6$

Opgave 11:

- a. $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{26}{120} = 0,217$
b. $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{4} = 0,033$
c. $P(\text{minstens } 1 \text{ wit}) = 1 - P(\text{geen wit}) = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{84}{120} = 0,7$
d. $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{90}{120} = 0,75$

Opgave 12:

- a. $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{6}{512} = 0,012$
b. $\frac{2}{8} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{66}{512} = 0,129$
c. $\frac{7}{8} \cdot \frac{8}{8} \cdot \frac{7}{8} = \frac{392}{512} = 0,766$
d. $\frac{1}{8} \cdot \frac{8}{8} \cdot \frac{7}{8} + \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{112}{512} = 0,219$
e. $P(\text{minstens } 1 \text{ peer}) = 1 - P(\text{geen peer}) = 1 - \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{8} = \frac{302}{512} = 0,590$

Opgave 13:

$$0,999 \cdot 0,997 \cdot 0,998 \cdot 0,992 \cdot 0,975 = 0,961$$

Opgave 14:

- a. $0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,144$
b. $0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,432$

Opgave 15:

- a. $0,40 \cdot 0,25 = 0,1$

b. $0,42 \cdot 0,60 \cdot 0,40 \cdot 0,75 = 0,076$

c. $P(\text{wordt niet 3 jaar}) = 1 - P(\text{wordt wel 3 jaar}) = 1 - 0,42 \cdot 0,60 \cdot 0,40 = 0,899$

6.2 Het herhalen van kansexperimenten

Opgave 16:

a. $\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,482$

b. $\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,482$

Opgave 17:

a. $P(3 \times \text{appel en } 3 \times \text{peer}) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \binom{6}{3} = 0,0819$

b. $P(\text{minstens 1 appel}) = 1 - P(\text{geen appel}) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^6 = 0,9533$

c. $P(3 \times \text{banaan}) = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \binom{6}{3} = 0,0819$

Opgave 18:

a. $P(\text{appel en banaan}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot 2 = 0,16$

b. $P(\text{geen banaan}) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0,64$

c. $P(2 \text{ verschillende}) = P(\text{ab of ap of bp}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot 2 + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot 2 = 0,64$

Opgave 19:

a. $P(\text{geen goed}) = 0,75^6 = 0,178$

b. $P(2 \text{ goed}) = 0,25^2 \cdot 0,75^4 \cdot \binom{6}{2} = 0,297$

c. $P(\text{minstens 2 goed}) = 1 - P(\text{hoogstens 1 goed}) = 1 - \left(0,75^6 + 0,75^5 \cdot 0,25 \cdot \binom{6}{1}\right) = 0,466$

Opgave 20:

a. $P(3 \times \text{mislukt}) = 0,72^3 = 0,373$

b. $P(\text{minstens } 1 \times \text{lukt}) = 1 - P(0 \times \text{lukt}) = 1 - 0,72^5 = 0,807$

c. $1 - 0,72^n > 0,95$

voer in: $y_1 = 1 - 0,72^x$

kijk in de tabel voor welke hele waarden van x geldt dat $y_1 > 0,95$

dat is voor $x \geq 10$

dus minstens 10 opstellingen

Opgave 21:

a. $0,4^3 \cdot 0,6^7 \cdot \binom{10}{3} = 0,215$

$$b. P(\text{minstens } 2 \times \text{juist}) = 1 - P(\text{hoogstens } 1 \times \text{juist}) = 1 - (0,6^{10} + 0,6^9 \cdot 0,4 \cdot \binom{10}{6}) = 0,954$$

Opgave 22:

$$a. 0,75^5 = 0,237$$

$$b. 0,25^3 \cdot 0,75^2 \cdot \binom{5}{3} = 0,088$$

$$c. 0,25^3 \cdot 0,25^2 \cdot \binom{5}{3} = 0,010$$

$$d. P(\text{minstens } 2 \times \text{één}) = 1 - P(\text{hoogstens } 1 \times \text{één}) = 1 - (0,75^5 + 0,25 \cdot 0,75^9 \cdot \binom{5}{1}) = 0,367$$

Opgave 23:

$$a. P(3 \text{ vieren}) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \binom{6}{3} = 0,054$$

$$b. P(\text{minstens } 1 \text{ zes}) = 1 - P(\text{geen zes}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0,665$$

$$c. P(\text{zes verschillende}) = \left(\frac{1}{6}\right)^6 \cdot 6! = 0,015$$

$$d. P(2 \times \text{zes en geen vijf}) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^4 \cdot \binom{6}{2} = 0,082$$

Opgave 24:

$$a. P(\text{som} = 6) = \frac{5}{36}$$

$$b. P(4 \times \text{som} = 6) = \left(\frac{5}{36}\right)^4 \cdot \left(\frac{31}{36}\right)^4 \cdot \binom{8}{4} = 0,0143$$

$$c. P(\text{som minder dan } 5) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(3 \times \text{som minder dan } 5) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \binom{8}{3} = 0,1042$$

$$d. P(\text{som} = 12) = \frac{1}{36}$$

$$P(\text{minstens } 1 \times \text{som} = 12) = 1 - P(0 \times \text{som} = 12) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n > 0,75$$

$$\text{Voer in: } y_1 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^x$$

kijk in de tabel voor welke hele waarden van x geldt dat $y_1 > 0,75$
dat is voor $x \geq 50$
dus minstens 50 keer gooien

Opgave 25:

a. $P(\text{minstens } 1 \times \text{zes}) = 1 - P(\text{geen zes}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,5177$

b. $P(\text{dubbel zes}) = \frac{1}{36}$

$$P(\text{minstens } 1 \times \text{dubbel zes}) = 1 - P(\text{geen dubbel zes}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0,4914$$

Dit is verliesgevend omdat de kans kleiner is dan 0,5.

Opgave 26:

a. $P(4 \times \text{zwart}) = \left(\frac{18}{38}\right)^4 = 0,0503$

b. $P(2 \times \text{zwart en } 2 \times \text{rood}) = \left(\frac{18}{38}\right)^2 \cdot \left(\frac{18}{38}\right)^2 \cdot \binom{4}{2} = 0,3021$

c. $P(\text{minstens } 1 \times \text{wit}) = 1 - P(\text{geen wit}) = 1 - \left(\frac{36}{38}\right)^4 = 0,1945$

d. $P(2 \times \text{rood}) = \left(\frac{18}{38}\right)^2 \cdot \left(\frac{20}{38}\right)^2 \cdot \binom{4}{2} = 0,3729$

e. $P(\text{minstens } 3 \times \text{rood}) = \left(\frac{18}{38}\right)^3 \cdot \left(\frac{20}{38}\right)^2 \cdot \binom{5}{3} + \left(\frac{18}{38}\right)^4 \cdot \left(\frac{20}{38}\right) \cdot \binom{5}{4} + \left(\frac{18}{38}\right)^5 = 0,4507$

Opgave 27:

a. $0,8^5 = 0,328$

b. $P(\text{minstens } 1 \text{ foto}) = 1 - P(\text{geen foto}) = 1 - 0,8^6 = 0,738$

c. $0,2^2 \cdot 0,8^6 \cdot \binom{8}{2} = 0,294$

Opgave 28:

a. als de eerste knikker wit is, dan zitten er daarna nog maar 4 knikkers in de vaas, waarvan er nog 1 wit is, dus $\frac{1}{4}$.

b. $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{3}$

c. $P(\text{w r}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = 0,3$

Opgave 29:

- a. $P(\text{r w}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56} = 0,268$
- b. $P(\text{r r w w}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = 0,107$

Opgave 30:

- a. $\frac{\binom{8}{3} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{10}{3} \cdot \binom{7}{1}} = 0,133$
- b. $\frac{\binom{8}{5} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{1}} = 0,089$
- c. $\frac{\binom{8}{3} \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1}}{\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{1}} = 0,089$

Opgave 31:

- a. $0,6^2 = 0,36$
- b. $0,4 \cdot 0,6^2 = 0,144$
- c. $P(\text{GLL of LGL of LGG of GLG}) = 0,4 \cdot 0,6^2 \cdot 2 + 0,6 \cdot 0,4^2 \cdot 2 = 0,48$

Opgave 32:

- a. $0,65^2 = 0,4225$
- b. $0,65^2 + 0,35^2 = 0,545$
- c. $0,65^2 + 0,65^2 \cdot 0,35 \cdot 2 = 0,718$

Opgave 33:

- a. $0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,084$
- b. $0,4 \cdot 0,7^3 = 0,1372$

Opgave 34:

- a. $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} = 0,1055$
- b. $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \frac{1}{4} = 0,0593$
- c. $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = 0,4375$
- d. $P(\text{minstens } 3 \times) = 1 - P(\text{hoogstens } 2 \times) = 1 - 0,4375 = 0,5625$

Opgave 35:

- a. een jaar heeft 365 dagen, dus heb je meer dan 365 personen dan zijn er altijd minstens twee personen op dezelfde dag jarig
- b. de eerste persoon kan uit 365 dagen kiezen
de tweede persoon kan nog maar uit 364 dagen kiezen
de derde persoon kan nog maar uit 363 dagen kiezen
- c. $\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \frac{361}{365} = 0,973$
- d. $1 - P(\text{allemaal verschillende dagen}) = 1 - 0,973 = 0,027$

e. $1 - P(\text{allemaal verschillende dagen}) = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \dots \cdot \frac{336}{365} =$

$$1 - ({}_{365}P_{30}) : (365^{30}) = 0,706$$

- f. hierbij is de voorwaarde dat de tweede persoon op dezelfde dag jarig is als Johnny Carson, terwijl in de groep van 40 personen de kans wordt uitgerekend dat minstens twee willekeurige personen op dezelfde dag jarig zijn. Dus Johnny Carson hoeft niet één van deze twee personen te zijn.

6.3 Trekken met en zonder terugleggen

Opgave 36:

a. $\binom{7}{4} = 35$

b. $\binom{8}{2} \cdot \binom{7}{2} = 588$

c. $\binom{8}{3} \cdot \binom{12}{1} = 672$

Opgave 37:

a. $\frac{\binom{6}{3} \binom{9}{2}}{\binom{15}{5}} = 0,240$

b. $P(\text{minstens 1 wit}) = 1 - P(\text{geen wit}) = 1 - \frac{\binom{10}{5}}{\binom{15}{5}} = 0,916$

c. $\frac{\binom{11}{5} + \binom{11}{4} \binom{4}{1}}{\binom{15}{5}} = 0,593$

d. $\frac{\binom{9}{5}}{\binom{15}{5}} = 0,042$

Opgave 38:

a. $P(\text{minstens 1 prijs}) = 1 - P(\text{geen prijs}) = 1 - \frac{\binom{84}{6}}{\binom{100}{6}} = 0,659$

b. $\frac{\binom{16}{2} \binom{84}{4}}{\binom{100}{6}} = 0,194$

c. $\frac{\binom{5}{1} \binom{10}{2} \binom{84}{3}}{\binom{100}{6}} = 0,018$

Opgave 39:

a. $\frac{\binom{7}{2}}{\binom{28}{2}} = 0,056$

b. nee, want bij a kies je twee verschillende leerlingen, maar bij de schijf kun je twee keer dezelfde sector draaien, dus deze kans is $0,25^2 = 0,0625$

Opgave 40:

a. $\frac{\binom{16}{2} \binom{24}{1}}{\binom{40}{3}} = 0,291$

$$b. P(\text{minstens 1 blauwe}) = 1 - P(\text{geen blauw}) = 1 - \frac{\binom{16}{3}}{\binom{40}{3}} = 0,943$$

$$c. \left(\frac{16}{40}\right)^3 \cdot \frac{24}{40} \cdot \binom{3}{2} = 0,288$$

$$d. P(\text{minstens 1 blauwe}) = 1 - P(\text{geen blauw}) = 1 - \left(\frac{16}{40}\right)^3 = 0,936$$

Opgave 41:

$$a. \left(\frac{12}{22}\right)^4 = 0,089$$

$$b. \frac{\binom{12}{4}}{\binom{22}{4}} = 0,068$$

Opgave 42:

$$a. \frac{\binom{38}{3}}{\binom{60}{3}} = 0,247$$

$$b. \left(\frac{38}{60}\right)^3 = 0,254$$

Opgave 43:

$$a. \frac{\binom{3}{2} \binom{7}{3}}{\binom{10}{5}} = 0,417$$

$$b. \frac{\binom{30}{2} \binom{70}{3}}{\binom{100}{5}} = 0,316$$

$$c. \frac{\binom{300}{2} \binom{700}{3}}{\binom{1000}{5}} = 0,309$$

$$d. \frac{\binom{3000}{2} \binom{7000}{3}}{\binom{10000}{5}} = 0,309$$

e. alle kansen zijn gelijk, want $P(\text{rood}) = 0,3$ en $P(\text{wit}) = 0,7$

$$0,3^2 \cdot 0,7^3 \cdot \binom{5}{2} = 0,3087$$

Opgave 44:

$$a. 0,7^{15} = 0,0047$$

$$b. 0,3^2 \cdot 0,7^{13} \cdot \binom{15}{2} = 0,0916$$

$$c. \quad P(\text{minstens } 2) = 1 - P(0 \text{ of } 1) = 1 - (0,7^{15} + \binom{15}{1} \cdot 0,7^{14} \cdot 0,3) = 0,9647$$

Opgave 45:

$$a. \quad 0,85^{10} = 0,1969$$

$$b. \quad 0,6^8 \cdot 0,15^2 \cdot \binom{10}{8} = 0,0170$$

$$c. \quad 0,6^9 \cdot 0,4 \cdot \binom{10}{9} + 0,6^{10} = 0,0464$$

Opgave 46:

$$a. \quad 2 \cdot 0,18 \cdot 0,82 = 0,2952$$

$$b. \quad 0,82^5 + 0,82^4 \cdot 0,18 \cdot \binom{5}{1} = 0,7776$$

$$c. \quad P(\text{minstens } 1 \text{ linkshandig}) = 1 - P(\text{allemaal rechtshandig}) = 1 - 0,82^n > 0,99$$

$$-0,82^n > -0,01$$

$$0,82^n < 0,01$$

$$n > \frac{\log 0,01}{\log 0,82} = 23,2$$

dus minstens 24 personen

$$d. \quad \frac{\binom{9}{2}}{\binom{50}{2}} = 0,0294$$

Opgave 47:

$$a. \quad 0,94^{12} = 0,476$$

$$b. \quad 0,09^2 \cdot 0,91^{10} \cdot \binom{12}{2} = 0,208$$

$$c. \quad 0,06^2 \cdot 0,85^{10} \cdot \binom{12}{2} = 0,047$$

Opgave 48:

$$a. \quad 0,88^{11} = 0,245$$

$$b. \quad 0,88^{22} + 0,88^{21} \cdot 0,12 \cdot \binom{22}{1} + 0,88^{20} \cdot 0,12^2 \cdot \binom{22}{2} = 0,498$$

$$c. \quad \frac{\binom{5}{2} \binom{30}{4}}{\binom{35}{6}} = 0,169$$

Opgave 49:

$$a. \quad P(\text{minstens } 2 \text{ lopend}) = 1 - P(0 \text{ of } 1 \text{ lopend}) = 1 - 0,95^{18} - 0,95^{17} \cdot 0,05 \cdot \binom{18}{1} = 0,226$$

b. $0,25^4 \cdot 0,75^{14} \cdot \binom{18}{4} + 0,25^5 \cdot 0,75^{13} \cdot \binom{18}{5} = 0,412$

c. $0,6^{12} \cdot 0,25^6 \cdot \binom{18}{12} = 0,010$

d. $0,3^4 \cdot 0,7^{14} \cdot \binom{18}{4} = 0,168$

e. $40\% = 7,2$ en $60\% = 10,8$

$$P(8, 9 \text{ of } 10 \text{ met de auto}) = 0,6^8 \cdot 0,4^{10} \cdot \binom{18}{8} + 0,6^9 \cdot 0,4^9 \cdot \binom{18}{9} + 0,6^{10} \cdot 0,4^8 \cdot \binom{18}{10} \\ = 0,379$$

6.4 Toevalsvariabelen

Opgave 50:

- a. $P(X = 17) = \frac{5}{25} = 0,2$
b. $P(Y = 1) = \frac{8}{25} = 0,32$
c. $P(X = 16 \wedge Y = 1) = \frac{7}{25} = 0,28$

Opgave 51:

- a. $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$
b. $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$
c. $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$
d. $P(\text{minstens 1 rode}) = P(X \geq 1)$
e. $P(\text{hoogstens 3 rode}) = P(X \leq 3)$
f. $P(\text{minder dan 2 rode}) = P(X < 2)$

Opgave 52:

- a. $P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{2}}{\binom{10}{4}} = 0,476$
b. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{5}{4}}{\binom{10}{4}} = 0,976$

Opgave 53:

- a. $P(\text{meer dan 10 ogen}) = P(X > 10)$
 $P(\text{minstens 10 ogen}) = P(X \geq 10)$
 $P(\text{hoogstens 10 ogen}) = P(X \leq 10)$
b. $P(X = 3) = \frac{2}{36} = 0,056$
 $P(X \geq 10) = \frac{6}{36} = 0,167$

Opgave 54:

- a. $P(X = 20) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{20}{2}} = 0,147$
b. $P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{12}{2}}{\binom{20}{2}} = 0,653$

Opgave 55:

- a. $P(X = 16) = \frac{25}{83} = 0,301$
b. $P(X = 16) + P(X = 17) + P(X = 18) = 1$

Opgave 56:

- a. $P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{10}{3}}{\binom{15}{5}} = 0,400$

b. $P(Y = 0) = \left(\frac{7}{15}\right)^4 = 0,047$

c. $P(Y \leq 3) = 1 - P(Y = 4) = 1 - \left(\frac{8}{15}\right)^4 = 0,919$

Opgave 57:

$P(X = 1) = \frac{6}{10} = 0,6$

$P(X = 2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{24}{90} = 0,267$

$P(X = 3) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{72}{720} = 0,1$

$P(X = 4) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{144}{5040} = 0,029$

$P(X = 5) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{6} = \frac{144}{30240} = 0,005$

Opgave 58:

a. $0,6^3 + 0,4^3 = 0,28$

b. $P(X = 3) = 0,28$

$P(X = 4) = 0,6^3 \cdot 0,4 \cdot 3 + 0,4^3 \cdot 0,6 \cdot 3 = 0,374$

$P(X = 5) = 1 - (0,28 + 0,374) = 0,346$

x	3	4	5
$P(X = x)$	0,28	0,374	0,346

Opgave 59:

a. $\left(\frac{8}{18}\right)^2 \cdot \frac{10}{18} \cdot \binom{3}{2} = 0,329$

b. $\frac{8}{18} \cdot \frac{4}{18} \cdot \frac{6}{18} \cdot 3! = 0,198$

Opgave 60:

a. alle staven zijn even lang

b. $X = 0$ bij kop

$X = 1$ bij munt

c. 2 sectoren met de getallen 1 en 2

Opgave 61:

a. $0,8^8 \cdot 0,2^2 \cdot \binom{10}{8} = 0,302$

b. $P(X < 9) = 1 - P(X \geq 9) = 1 - (0,8^9 \cdot 0,2 \cdot \binom{10}{9} + 0,8^{10}) = 0,624$

Opgave 62:

a. $0,58^7 \cdot 0,42^5 \cdot \binom{12}{7} = 0,229$

b. $0,32^4 \cdot 0,68^8 \cdot \binom{12}{4} = 0,237$

c. $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - (0,68^{10} + 0,68^9 \cdot 0,32 \cdot \binom{10}{1}) = 0,935$

d. $0,58^8 \cdot 0,32^4 \cdot \binom{12}{8} = 0,066$

Opgave 63:

a. $P(X = 0) = \frac{17}{24} = 0,708$

$$P(X = 1) = \frac{6}{24} = 0,25$$

b. dat is de kans dat een jongen 1 keer is blijven zitten

c. $P(X = 1 \text{ onder voorwaarde } Y = 0) = \frac{2}{8} = 0,25 = P(X = 1)$ dus ja

$$P(X = 1 \text{ onder voorwaarde } Y = 1) = \frac{4}{16} = 0,25 = P(X = 1) \text{ dus ja}$$

d. dat is de kans dat een jongen niet is blijven zitten

e. $P(X = 0 \text{ onder voorwaarde } Y = 0) = \frac{5}{8} = 0,625 \neq P(X = 0)$ dus nee

Opgave 64:

a. $\frac{25}{50} = 0,5$

b. $\frac{0}{50} = 0$

c. $\frac{0}{25} = 0$

d. nee

$$P(X = 17) = \frac{15}{80} = 0,1875$$

$$P(X = 17 \text{ onder voorwaarde } Y = 0) = 0$$

de twee kansen zijn niet gelijk, dus afhankelijk

Opgave 65:

a. $\frac{1}{36}$

b. 0

c. $P(X = 2 \text{ onder voorwaarde } Y = 3) \neq P(X = 2)$

6.5 Diagnostische toets

Opgave 1:

a. $\left(\frac{2}{6}\right)^4 = 0,0123$

b. $\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,4823$

c. $1 - P(\text{geen enkele keer meer dan 2 ogen}) = 1 - \left(\frac{2}{6}\right)^4 = 0,9877$

Opgave 2:

a. $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{60} = 0,033$

b. $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{60} = 0,45$

c. $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{16}{60} = 0,267$

d. $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{60} = 0,1$

e. $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{45}{60} = 0,75$

Opgave 3:

a. $0,83 \cdot 0,66 \cdot 0,41 = 0,225$

b. $0,83 \cdot 0,66 \cdot 0,59 = 0,323$

c. $0,83 \cdot 0,66 \cdot 0,41 \cdot 0,12 = 0,027$

d. $P(\text{minder dan 4 maanden oud}) = 1 - P(\text{minstens 4 maanden oud}) = 1 - 0,027 = 0,973$

Opgave 4:

a. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \binom{7}{2} = 0,164$

b. $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \binom{7}{5} = 0,073$

c. $\left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \binom{7}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^7 = 0,670$

d. $P(\text{hoogstens 5 keer rood}) = 1 - P(\text{minstens 6 keer rood}) =$
 $= 1 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \binom{7}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^7\right) = 0,938$

Opgave 5:

a. $\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} = 0,265$

b. $\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} = 0,009$

Opgave 6:

a. $P(\text{som} = 4) = \frac{3}{216}$

$$P(2 \times \text{som} = 4) = \left(\frac{3}{216}\right)^2 \cdot \left(\frac{213}{216}\right)^{18} \cdot \binom{20}{2} = 0,028$$

b. $P(\text{minstens 17 ogen}) = \frac{4}{216}$

$$P(1 \times 17 \text{ ogen}) = \frac{4}{216} \cdot \left(\frac{212}{216}\right)^9 \cdot \binom{10}{1} = 0,157$$

c. $P(\text{som} = 17) = \frac{3}{216}$
 $P(\text{minstens 1 keer som}=17) = 1 - P(\text{geen enkele keer som}=17) =$
 $= 1 - \left(\frac{213}{216}\right)^n > 0,4$

neem $y_1 = 1 - \left(\frac{213}{216}\right)^x$ en kijk in de tabel voor welke x geldt dat $y_1 > 0,4$
dat geldt voor $x \geq 37$ dus moet hij minstens 37 keer gooien

Opgave 7:

Degene die de wedstrijd wint moet de laatste partij winnen, dus deze staat dan vast.

a. $0,7^3 \cdot 0,3 \cdot 3 + 0,3^3 \cdot 0,7 \cdot 3 = 0,3654$
b. $0,7^3 + 0,7^3 \cdot 0,3 \cdot \binom{3}{2} + 0,7^3 \cdot 0,3^2 \cdot \binom{4}{2} = 0,837$

Opgave 8:

a. $\frac{\binom{7}{3} \binom{9}{2}}{\binom{16}{5}} = 0,288$
b. $\left(\frac{7}{16}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^2 \cdot \binom{5}{3} = 0,265$

Opgave 9:

a. $0,74^9 = 0,067$
b. $0,45^2 \cdot 0,55^7 \cdot \binom{9}{2} = 0,111$
c. $0,45^5 \cdot 0,29^4 \cdot \binom{9}{5} = 0,016$
d. $0,71^9 + 0,71^8 \cdot 0,29 \cdot \binom{9}{1} + 0,71^7 \cdot 0,29^2 \cdot \binom{9}{2} = 0,490$

Opgave 10:

a. $P(X = 10) = \frac{5}{36}$ 3-7, 4-6, 5-5, 6-4, 7-3
 $P(X \leq 8) = \frac{6}{36}$ 3-3, 3-4, 3-5, 4-3, 4-4, 5-3
 $P(Y > 0) = \frac{30}{36}$ $1 - P(Y = 0) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36}$

b. nee
 $P(X = 6) = \frac{1}{36}$ 3-3
 $P(X = 6 \text{ onder voorwaarde } Y = 1) = 0$

De kansen zijn ongelijk, dus zijn de gebeurtenissen afhankelijk

Gemengde opgaven H6: Kansrekening

Opgave 14:

a. kaaa of aaak

$$\frac{3}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{15} + \frac{5}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{15} = 0,0032$$

b. $\frac{5}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{15} + \frac{3}{15} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{15} + \frac{1}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{1}{15} + \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{6}{15} = 0,0082$

c. $\frac{1}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{14}{15} + \frac{14}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{14}{15} + \frac{14}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{14}{15} + \frac{14}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{1}{15} = 0,4425$

d. $\frac{12}{15} \cdot \frac{13}{15} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{9}{15} = 0,3051$

Opgave 15:

a. $0,8^{10} = 0,1074$

b. $0,5^6 \cdot 0,2^4 \cdot \binom{10}{6} = 0,0053$

c. $P(\text{minstens 2 rood}) = 1 - P(0 \text{ of } 1 \text{ rood}) = 1 - (0,7^{10} + 0,7^9 \cdot 0,3 \cdot \binom{10}{1}) = 0,8507$

d. $0,5^5 \cdot 0,5^5 \cdot \binom{10}{5} = 0,2461$

Opgave 16:

a. $\frac{5}{9} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{9}{13} = 0,2448$

b. $P(rrw) = \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{13} = 0,1088$

$$P(rwr) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{13} = 0,1088$$

$$P(wrr) = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{7}{13} = 0,1088$$

$$P(rrr) = 0,2448$$

$$P(\text{meer rode dan witte}) = 3 \cdot 0,1088 + 0,2448 = 0,5711$$

Opgave 17:

a. $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{120}$

b. $P(X = 100) = \frac{1}{120}$

$$P(X = 20) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{120}$$

$$P(X = 5) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{120}$$

$$P(X = 0) = 1 - \frac{1}{120} - \frac{4}{120} - \frac{12}{120} = \frac{103}{120}$$

c. $P(Y = 10) = P(334 \text{ of } 343 \text{ of } 433) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{120}$

d. $P(2 \times 3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{12}{120} = 0,1$

$$0,1^4 = 0,0001$$

e. $\left(\frac{119}{120}\right)^7 \cdot \frac{1}{120} + \left(\frac{119}{120}\right)^8 \cdot \frac{1}{120} = 0,0157$

f. $P(\text{minstens } 1 \times \text{hoofdprijs}) = 1 - P(\text{geen enkele keer } X = 100) = 1 - \left(\frac{119}{120}\right)^n > 0,3$

$$y_1 = 1 - \left(\frac{119}{120}\right)^x \text{ kijk in de tabel voor welke } x \text{ geldt dat } y_1 > 0,3$$

dat is voor $x \geq 43$

dus moet ze het spel minstens 43 keer spelen

Opgave 18:

- a. $0,68^{10} \cdot 0,32^3 \cdot \binom{13}{10} = 0,1981$
- b. $P(\text{minstens } 3) = 1 - P(0 \text{ of } 1 \text{ of } 2)$
 $= 1 - \left(0,19^{13} + 0,19^{12} \cdot 0,81 \cdot \binom{13}{1} + 0,19^{11} \cdot 0,81^2 \cdot \binom{13}{2} \right) = 0,4611$
- c. $0,68^9 \cdot 0,19^4 \cdot \binom{13}{9} = 0,0290$

Opgave 19:

- a. $0,25^2 \cdot 0,75^{16} \cdot \binom{18}{2} + 0,25^3 \cdot 0,75^{15} \cdot \binom{18}{3} = 0,2662$
- b. $P(0 \text{ of } 1 \text{ of } 2 \text{ goed}) = 0,75^{13} + 0,75^{12} \cdot 0,25 \cdot \binom{13}{1} + 0,75^{11} \cdot 0,25^2 \cdot \binom{13}{2} = 0,3326$
- c. $P(0 \text{ of } 1 \text{ of } 2 \text{ goed}) = 0,75^8 + 0,75^7 \cdot 0,25 \cdot \binom{8}{1} + 0,75^6 \cdot 0,25^2 \cdot \binom{8}{2} = 0,6785$

Opgave 20:

- a. $\left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{12}\right)^3 \cdot \binom{6}{3} = 0,0226$
- b. $P(\text{geen rood}) = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{7}{44}$
 $P(2 \times \text{geen rood}) = \left(\frac{7}{44}\right)^2 \cdot \left(\frac{37}{44}\right)^4 \cdot \binom{6}{2} = 0,1898$
- c. hij pakt dus 3 rode en 1 witte of 1 rode, 2 witte en 1 blauwe
 $\frac{\binom{5}{3} \binom{4}{1} + \binom{5}{1} \binom{4}{2} \binom{3}{2}}{\binom{12}{4}} = 0,2626$

Opgave 21:

- a. ja, als de ene persoon bloedgroep A en de andere persoon bloedgroep B heeft
- b. $0,46^2 + 0,43^2 + 0,08^2 + 0,03^2 = 0,4038$
- c. $P(\text{minstens } 1 \times O) = 1 - P(\text{geen } O) = 1 - 0,54^{12} = 0,9994$
- d. $0,4038 \cdot (0,85^2 + 0,15^2) = 0,3$

Opgave 22:

- a. het eerste plaatje maakt niet uit, dan heb je nog 15 plaatjes over waarvan er één hetzelfde is als het eerste plaatje, dus $\frac{1}{15}$
- b. $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{105}$
- c. $\frac{4!}{2!} = 12$

d. strategie 1: $P(\text{winst}) = \frac{1}{3}$

strategie 2: $P(\text{winst}) = P(\text{vv of dd}) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$